ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки

Том 24, № 125 2019

DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-125-26-32

УДК 517.988

О существовании неподвижных точек у вполне непрерывных операторов в F-пространстве

Александр Николаевич ДОРОХОВ, Михаил Георгиевич КАРПОВ

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный педагогический университет»

394043, Российская Федерация, г. Воронеж, ул. Ленина, 86

ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0551-7511, e-mail: dor-an@mail.ru

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2739-5706, e-mail: karpovmg57@yandex.ru

On the existence of fixed points in completely continuous operators in F-space

Alexander N. DOROKHOV, Michael G. KARPOV

Voronezh State Pedagogical University

86 Lenin St., Voronezh 394043, Russian Federation

ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0551-7511, e-mail: dor-an@mail.ru

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2739-5706, e-mail: karpovmg57@yandex.ru

Аннотация. Настоящая работа посвящается развитию теории неподвижных точек вполне непрерывных операторов. Приводятся доказательства новых теорем существования неподвижных точек вполне непрерывных операторов, действующих в F-пространстве (пространстве Фреше). Данный класс пространств, кроме банаховых, включает в себя такие важные пространства, как счётно-нормированные и пространства $L_p(0 < p < 1)$, $l_p(0 < p < 1)$.

Ключевые слова: банахово пространство; F-пространство; вполне непрерывный оператор; неподвижная точка

Для цитирования: *Дорохов А. Н., Карпов М. Г.* О существовании неподвижных точек у вполне непрерывных операторов в F-пространстве // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2019. Т. 24. № 125. С. 26–32. DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-125-26-32

Abstract. This work is dedicated to the development of the theory of fixed points of completely continuous operators. We prove existence of new theorems of fixed points of completely continuous operators in F-space (Frechet space). This class of spaces except Banach includes such important space as a countably normed space and $L_p(0 < p < 1)$, $l_p(0 < p < 1)$.

Keywords: banach space; F-space; completely continuous operator; fixed point

For citation: Dorokhov A. N., Karpov M. G. O sushestvovanii nepodvizhnykh tochek u vpolne neprerivnykh operatorov v F-prostranstve [On the existence of fixed points in completely continuous operators in F-space]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2019, vol. 24, no. 125, pp. 26–32. DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-125-26-32 (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Одним из важных разделов современного анализа является теория нелинейных операторных уравнений в банаховых пространствах с конусами, созданная М.А. Красносельским и его учениками (см. [1]–[4]). Ценность этой теории обусловливается её многочисленными приложениями в различных задачах естествознания: в задаче о критическом режиме ядерного реактора, в теории волн на поверхности тяжёлой жидкости, в задачах о формах потери устойчивости упругих систем, в задачах геометрии в целом, в теории устойчивости, в теории нелинейных краевых задач, в математической экономике и т. д.

Естественно возникает вопрос о распространении теории нелинейных операторных уравнений на более широкие классы пространств, чем банаховы, и, в частности, на F-пространства (пространства Фреше). Этот класс пространств, кроме банаховых, включает в себя такие важные пространства, как счётно-нормированные и пространства $L_p(0 < p < 1)$, $l_p(0 < p < 1)$.

Развитию теории неподвижных точек вполне непрерывных операторов, действующих в F-пространстве, посвящается настоящая работа.

1. Предварительные сведения

Приведём некоторые необходимые сведения и сформулируем ранее доказанные утверждения [5], которые будем использовать в дальнейшем.

О п р е д е л е н и е 1.1. Линейное метрическое пространство X называется F-пространством [6], [7], если его метрика, кроме обычных свойств, обладает ещё свойствами:

1) $\rho(x,y) = \rho(x-y,0)$ $(x,y \in X)$;
2) из $\alpha_n \to \alpha$ следует $\rho(\alpha_n x, \alpha x) \to 0$ $(x \in X)$, и из $x_n \to x$ следует $\rho(\alpha x_n, \alpha x) \to 0$ $(\alpha \in R)$;
3) пространство X полно по метрике.

В дальнейшем число $\|x\|_\rho = \rho(x,0)$ будем называть ρ-нормой элемента x.

Пусть X — m-мерное F-пространство с ρ-нормой $\|x\|_\rho$, а $(l_1, \ldots, l_m)$ — какой-нибудь базис в X. Тогда каждый элемент $x \in X$ единственным образом представляется в виде:

$$x = \sum_{i=1}^{m} \xi_i l_i.$$

Положим $\|x\| = \max\limits_{i \in \overline{1,m}} |\xi_i|$. Число $\|x\|$ является нормой в X.

Лемма 1.1. *В m-мерном F-пространстве X для любой последовательности $(x_n) \subset X$ соотношения $\|x_n\|_\rho \to 0$ и $\|x_n\| \to 0$ равносильны.*

Определение 1.2. Оператор A называется непрерывным на множестве $M \subset X$ F-пространства X, если он непрерывен в каждой точке x множества M.

Определение 1.3. Оператор A называется компактным на множестве M F-пространства X, если он преобразует любое ограниченное по ρ-норме $\|x\|_\rho$ множество $N \subset M$ в относительно компактное множество $AN \subset X$.

Определение 1.4. Оператор A называется вполне непрерывным на множестве $M \subset X$ F-пространства X, если он непрерывен и компактен на этом множестве.

Пусть X — F-пространство. Обозначим через X^* множество всех линейных непрерывных в F-пространстве функционалов. Определим в этом множестве операции сложения элементов и умножения элементов на числа по формулам:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (\alpha f)(x) = \alpha f(x).$$

С этими операциями множество X^* становится линейным (векторным) пространством, которое называется сопряжённым пространством для F-пространства X.

Определение 1.5. Сопряжённое пространство X^* называется достаточным в F-пространстве X, если для любых элементов $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$ существует функционал $f \in X^*$, такой, что $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Легко видеть, что если в F-пространстве X существует норма $\|x\|$, подчинённая ρ-норме $\|x\|_\rho$, т. е. если существует число $a > 0$, такое, что $a\|x\| \le \|x\|_\rho$ $(x \in X)$, то сопряжённое пространство X^* достаточно в X.

Пусть в F-пространстве X множество $M \subset X$ относительно компактно. Тогда его выпуклая оболочка coM также будет относительно компактным множеством в том случае, если ρ-норма $\|x\|_\rho$ в X эквивалентна некоторой норме $\|x\|$, т. е. если существуют числа $a > 0$, $b > 0$, такие, что $a\|x\| \le \|x\|_\rho \le b\|x\|$ $(x \in X)$.

Теорема 1.1. *Пусть*

1) для каждого относительно компактного множества $M \subset X$ множество coM также относительно компактно в F-пространстве X;

2) сопряжённое пространство X^* достаточно в F-пространстве X;

3) вполне непрерывный оператор A преобразует непустое замкнутое ограниченное по ρ-норме $\|x\|_\rho$ выпуклое множество $V \subset X$ в себя.

Тогда существует элемент $x_* \in V$, такой, что $Ax_* = x_*$.

Теорема 1.2. *Пусть*

1) при каждом $x \in X \backslash \{0\}$ *функция* $\varphi_x(t) = \|tx\|_\rho$ *возрастает по переменной* t *в промежутке* $[0, +\infty)$;

2) существует число $b > 0$, *такое, что при всех* $t \in [0,1]$ *и* $x \in X$ *выполняется неравенство* $\|tx\|_\rho \le bt\|x\|_\rho$;

3) в X *существует норма* $\|x\|$ *и числа* $a > 0$ *и* $r_0 > 0$, *такие, что* $a\|x\| \le \|x\|_\rho$ $(x \in X, \|x\|_\rho \le r_0)$;

4) вполне непрерывный оператор A *преобразует непустое замкнутое ограниченное по* ρ*-норме* $\|x\|_\rho$ *выпуклое множество* $V \subset X$ *в себя.*

Тогда существует элемент $x_0 \in V$, *такой, что* $Ax_0 = x_0$.

2. Основные результаты

Получим новые условия существования неподвижных точек вполне непрерывных операторов, действующих в F-пространстве X. Вначале рассмотрим ситуацию, когда пространство X упорядочено некоторым конусом $K \subset X$.

Определение 2.1. Конус $K \subset X$ F-пространства X называется псевдонормальным, если для любых элементов $u, v \in X$ $(u \le v)$ конусной отрезок $\langle u, v\rangle$ ограничен по ρ-норме $\|x\|_\rho$.

Теорема 2.1. *Пусть*

1) в F*-пространстве* X *конус* K *псевдонормален;*

2) для любого относительно компактного множества $M \subset X$ *множество* coM *также относительно компактно;*

3) сопряжённое пространство X^* *достаточно в* X;

4) вполне непрерывный оператор A *преобразует конусной отрезок* $\langle u, v\rangle$, *где* $u \le v$ *— фиксированные элементы в* X, *в себя.*

Тогда существует элемент $x_* \in \langle u, v\rangle$, *такой, что* $Ax_* = x_*$.

Доказательство. В пространстве X конусной отрезок $\langle u, v\rangle$ в силу псевдонормальности конуса K является замкнутым ограниченным по ρ-норме $\|x\|_\rho$ выпуклым множеством. Следовательно, в предположениях настоящей теоремы выполняются все условия теоремы 1.1. □

Определение 2.2. Оператор A, действующий в F-пространстве X, называется усиленно непрерывным, если из $x_n \xrightarrow{\text{сл}} x$ следует $Ax_n \to Ax$ по ρ-норме $\|x\|_\rho$.

В следующей теореме не предполагается, что для любого относительно компактного множества M в F-пространстве X множество coM также относительно компактно.

Теорема 2.2. *Пусть действующий в* F*-пространстве* X *оператор* A *усиленно непрерывен, вполне непрерывен и преобразует непустое замкнутое ограниченное по* ρ*-норме* $\|x\|_\rho$ *выпуклое множество* $V \subset X$ *в себя.*

Тогда существует элемент $x_* \in V$, *такой, что* $Ax_* = x_*$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу компактности оператора A множество $M = AV$ относительно компактно. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ в M существует конечная ε-сеть — множество $\{y_1, \ldots, y_n\}$ такое, что для произвольного $y \in M$ существует элемент $y_i \in (y_1, \ldots, y_n)$, для которого $\|y - y_i\|_\rho < \varepsilon$.

Построим на множестве M оператор шаудеровского проектирования

$$P_\varepsilon y = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_i(y)\, y_i}{\sum_{i=1}^{n} \mu_i(y)}, \quad \text{где} \quad \mu_i(y) = \begin{cases} \varepsilon - \|y - y_i\|_\rho, & \text{если} \ \|y - y_i\|_\rho \leq \varepsilon, \\ 0, & \text{если} \ \|y - y_i\|_\rho > \varepsilon. \end{cases}$$

Легко видеть, что функционалы $\mu_i(y)$ $\left(i \in \overline{1, m}\right)$ неотрицательны и непрерывны на множестве M. Далее, так как для любого $y \in M$ существует элемент $y_i \in \{y_1, \ldots, y_n\}$, удовлетворяющий оценке $\|y - y_i\|_\rho < \varepsilon$, то значение $\mu_i(y) = \varepsilon - \|y - y_i\|_\rho > 0$. Следовательно, $\sum_{i=1}^{m} \mu_i(y) > 0$ $(y \in M)$. Поэтому оператор $P_\varepsilon(y)$ непрерывен на M.

Нетрудно видеть, что конечномерные операторы $A_\varepsilon x = P_\varepsilon A x \, (\varepsilon > 0)$ непрерывны на множестве V.

Обозначим через X_ε конечномерное пространство, натянутое на множество $(y_1, \ldots, y_n)$ и положим $V_\varepsilon = V \bigcap X_\varepsilon$. Так как множество V выпукло и $AV \subset V$, то

$$P_\varepsilon A x = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_i(Ax)\, y_i}{\sum_{i=1}^{n} \mu_i(Ax)} \in V \bigcap X_\varepsilon = V_\varepsilon \ \ (x \in V, \ \varepsilon > 0).$$

Таким образом, $A_\varepsilon V_\varepsilon = P_\varepsilon A V_\varepsilon \subset V_\varepsilon$.

Далее, так как в силу леммы 1.1 непрерывность оператора $A_\varepsilon = P_\varepsilon A$ в конечномерном F-пространстве X_ε равносильна его непрерывности в X_ε по норме, то в силу теоремы Боля-Брауэра существуют элементы $x_\varepsilon \in V_\varepsilon$ такие, что $A_\varepsilon x_\varepsilon = P_\varepsilon A x_\varepsilon = x_\varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$. Полагая $\varepsilon = \frac{1}{n} \, (n \in N)$, построим элементы $x_n \in V_{\frac{1}{n}}$ $(n \in N)$, такие, что $A_{\frac{1}{n}} x_n = P_{\frac{1}{n}} A x_n = x_n$ $(n \in N)$.

В силу компактности оператора A без ограничения общности можно считать, что имеет место сходимость $Ax_n \to x_* \in V$ по ρ-норме $\|x\|_\rho$.

Возьмём произвольный функционал $f \in X^*$. Из определения оператора

$$P_{\frac{1}{n}}(y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_i(y)\, y_i}{\sum_{i=1}^{n} \mu_i(y)}$$

непосредственно следует, что если $\mu_i(y) \neq 0$, то $\|y - y_i\|_\rho < \frac{1}{n}$. Поэтому

$$\left| f\left(P_{\frac{1}{n}} A x_n - A x_n\right) \right| \leq \sup_{\mu_i(Ax_n) \neq 0} |f(y_i - Ax_n)| \to 0.$$

Отсюда и из $\|Ax_n - x_*\|_\rho \to 0$ непосредственно следует, что

$$f(x_n) = f\left(P_{\frac{1}{n}} A x_n\right) \to f(x_*).$$

Следовательно, $x_n = P_{\frac{1}{n}} A x_n \xrightarrow{\text{сл}} x_*$. Тогда в силу усиленной непрерывности оператора A имеет место сходимость $Ax_n \to Ax_*$ по ρ-норме $\|x\|_\rho$. Отсюда и из $\|Ax_n - x_*\|_\rho \to 0$ следует, что $Ax_* = x_*$. $\square$

О п р е д е л е н и е 2.3. Оператор A, действующий в F-пространстве X, называется слабо непрерывным в X, если из $x_n \xrightarrow{\text{сл}} x$ следует $Ax_n \xrightarrow{\text{сл}} Ax$.

Теорема 2.3. *Пусть*

1) сопряжённое пространство X^* достаточно в F-пространстве X;

2) слабо непрерывный, и вполне непрерывный оператор A преобразует непустое замкнутое ограниченное по ρ-норме $\|x\|_\rho$ выпуклое множество $V \subset X$ в себя.

Тогда существует элемент $x_* \in V$, такой, что $Ax_* = x_*$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Точно так же, как и при доказательстве теоремы 2.2, показывается, что существуют элементы $x_n \in V_{\frac{1}{n}} = V \bigcap X_{\frac{1}{n}}$, где $X_{\frac{1}{n}}$ — конечномерное пространство, натянутое на $\frac{1}{n}$-сеть $(y_1, \ldots, y_n) \subset M = \overline{AV}$, такие, что $P_{\frac{1}{n}} Ax_n = x_n$ $(n \in N)$.

Так как последовательность (Ax_n) относительно компактна, то без ограничения общности можно считать, что $Ax_n \to x_*$ по ρ-норме $\|x\|_\rho$.

Возьмём произвольный функционал $f \in X^*$. Из определения оператора $P_{\frac{1}{n}}$ непосредственно следует, что если $\mu_i(y) \neq 0$, то $\|y - y_i\|_\rho < \frac{1}{n}$. Поэтому

$$\left| f\left(P_{\frac{1}{n}} Ax_n - Ax_n\right)\right| \le \sup_{\mu_i(Ax_n) \neq 0} |f(y_i - Ax_n)| \to 0.$$

Отсюда и из $\|Ax_n - x_*\|_\rho \to 0$ вытекает, что

$$f(x_n) = f\left(P_{\frac{1}{n}} Ax_n\right) \to f(x_*).$$

Следовательно, $x_n \xrightarrow{\text{сл}} x_*$. Поэтому в силу слабой непрерывности оператора A последовательность $Ax_n \xrightarrow{\text{сл}} Ax_*$. Отсюда и из $\|Ax_n - x_*\|_\rho \to 0$ ввиду достаточности X^* в X следует, что $Ax_* = x_*$. Действительно, из $\|Ax_n - x_*\|_\rho \to 0$ для любого $f \in X^*$ получаем $f(Ax_n) \to f(x_*)$, а из $Ax_n \xrightarrow{\text{сл}} Ax_*$ следует $f(Ax_n) \to f(Ax_*)$. Поэтому $f(x_*) = f(Ax_*)$. Но тогда в силу достаточности X^* в X верно $Ax_* = x_*$. □

Список литературы

[1] М. А. Красносельский, *Положительные решения операторных уравнений*, Физматгиз, М., 1962.

[2] М. А. Красносельский, *Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений*, Гостехиздат, М., 1956.

[3] И. А. Бахтин, *Положительные решения нелинейных уравнений с вогнутыми операторами*, учебное пособие для спецкурса, ВГПИ, Воронеж, 1985.

[4] И. А. Бахтин, *Нелинейные уравнения с монотонными операторами*, учебное пособие для спецкурса, ВГПИ, Воронеж, 1988.

[5] А. Н. Дорохов, “Неподвижные точки вполне непрерывных операторов в F-пространстве”, *Известия ВГПУ*, **257** (2011), 8–15.

[6] К. Иосида, *Функциональный анализ*, Мир, М., 1967.

[7] Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ*, Наука, М., 1977.

References

[1] M. A. Krasnoselskii, *Positive Solutions of Operator Equations*, Fizmatgiz, Moscow, 1962 (In Russian).

[2] M. A. Krasnoselskii, *Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations*, Gostekhizdat, Moscow, 1956 (In Russian).

[3] I. A. Bakhtin, *Positive Solutions of Nonlinear Equations with Concave Operators*, a manual for special course, Voronezh State Pedagogical Institute, Voronezh, 1985 (In Russian).

[4] I. A. Bakhtin, *Nonlinear Equations with Monotone Operators*, a manual for special course, Voronezh State Pedagogical Institute, Voronezh, 1988 (In Russian).

[5] A. N. Dorokhov, "The fixed points of completely continuous operators in F-space", *News of the Voronezh State Pedagogical University*, **257** (2011), 8–15 (In Russian).

[6] K. Yoshida, *Functional Analysis*, World, Moscow, 1967 (In Russian).

[7] L. V. Kantorovich, G. P. Akilov, *Functional Analysis*, Science, Moscow, 1977 (In Russian).

Информация об авторах

Дорохов Александр Николаевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики. Воронежский государственный педагогический университет, г. Воронеж, Российская Федерация. E-mail: dor-an@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0551-7511

Карпов Михаил Георгиевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики. Воронежский государственный педагогический университет, г. Воронеж, Российская Федерация. E-mail: karpovmg57@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2739-5706

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:
Дорохов Александр Николаевич
E-mail: dor-an@mail.ru

Поступила в редакцию 16.01.2019 г.
Поступила после рецензирования 11.02.2019 г.
Принята к публикации 28.03.2019 г.

Information about the authors

Alexander N. Dorokhov, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Higher Mathematics Department. Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, the Russian Federation. E-mail: dor-an@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0551-7511

Michael G. Karpov, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Higher Mathematics Department. Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, the Russian Federation. E-mail: karpovmg57@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2739-5706

There is no conflict of interests.

Corresponding author:
Alexander N. Dorokhov
E-mail: dor-an@mail.ru

Received 16 January 2019
Reviewed 11 February 2019
Accepted for press 28 March 2019